第27卷 第4期
2010年08月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 4
Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0643-09

线性乘性规划的全局优化算法

周雪刚[1,2]， 武 坤[1]， 曾海群[1]

(1- 中南大学数学科学与计算技术学院，长沙 410075； 2- 广东金融学院应用数学系，广州 510521)

摘 要: 本文研究线性乘性规划问题(LMP)的全局最优化算法，线性乘性规划问题在生产运输、工厂布局设计、超大规模集成电路芯片设计等方面有重要的应用。首先将LMP问题转化为等价规划问题(P1)，然后利用参数线性化方法在相应的超矩形上求得问题(P1)的目标函数和约束函数线性下界估计，并提出了一个求线性乘性规划全局解的确定性全局优化算法，并证明了算法的收敛性。数值实验表明提出的方法是可行和有效的。

关键词: 线性乘性规划；参数线性松弛；全局算法

分类号: **AMS**(2000) 90C26; 90C30 **中图分类号**: O221.2 **文献标识码**: A

1 引言

考虑下面线性乘性规划的全局优化问题

$$\mathrm{LMP}(X^0)\quad \begin{cases} \min & \mathrm{Z}=\mathrm{G}_0(x) \\ \text{s.t.} & \mathrm{G}_j(x)\leqslant \delta_j,\quad j=1,2,\cdots,m, \\ & x\in X^0=[\underline{x},\bar{x}]\subset R^N, \end{cases}$$

其中

$$\mathrm{G}_j(x)=\prod_{t=1}^{T_j}\Big(\sum_{n=1}^{N}\gamma_{jtn}x_n+d_{jt}\Big),\quad j=0,1,\cdots,m,$$

γ_{jtn}，d_{jt} 都是任意的实数

$$\sum_{n=1}^{N}\gamma_{jtn}x_n+d_{jt}>0,\quad \delta_j>0,\quad j=0,1,\cdots,m,\quad t=1,2,\cdots,T_j,\quad \underline{x}>0,\quad \underline{x}\leqslant\bar{x}$$

都是有限实向量。

上述线性乘性规划广泛应用于生产运输[1]、工厂布局设计[2]、超大规模集成电路芯片设计[3]、数据挖掘与模式识别[4]等实际问题。尽管求解LMP的优化方法很多，而对LMP的全局优化方法却很少，已有的全局优化方法都是针对LMP的特殊形式进行讨论的[5-9]。本文给出一种参数线性化枝术，对LMP问题提出了一个分支定界全局优化算法，分支定界算法是一种比较有效的全局优化算法，在很多全局优化问题都有重要的应用[10-13]。利用对数变换及目标函数和约束函数的线性下界估计，建立LMP的线性松驰规划问题LRP，通过求解一系列线性松驰规划问题LRP，逐步改进原LMP最优目标值的上界和下界，最终确定原问题的全局最小解。

收稿日期: 2008-07-18. **作者简介**: 周雪刚(1974年1月生)，男，博士，讲师. 研究方向：全局优化与模糊优化.

2 线性化技术

为求解LMP，对目标函数与乘性约束不等式取对数，则LMP可转化为如下等价的规划问题

$$P(X^0)\ \begin{cases} \min & \Psi_0(x) \\ \text{s.t.} & \Psi_j(x)\leqslant \ln\delta_j,\quad j=1,2,\cdots,m, \\ & x\in X^0=[\underline{x}^0,\bar{x}^0]\subset R^N, \end{cases} \tag{1}$$

其中对所有的$j=0,1,\cdots,m$，有

$$\Psi_j(x)=\sum_{t=1}^{T_j}\ln\Big(\sum_{n=1}^{N}\gamma_{jtn}x_n+d_{jt}\Big).$$

设$X=[\underline{x},\bar{x}]=\{x\in R^N\,|\,\underline{x}\leqslant x\leqslant\bar{x}\}$，对任意的$x\in X$，定义

$$x(\sigma)=\underline{x}+\sigma(\bar{x}-\underline{x}), \tag{2}$$

其中$\sigma\in\{0,1\}^N$是N维向量，其分量$\sigma_i=1$或0。显然，$x(0)=\underline{x}$, $x(1)=\bar{x}$，对任意的$\sigma\in\{0,1\}^N$, $x(\sigma)$表示区间向量X的一个顶点。下面定理说明如何构造函数$\Psi_j(x)$ $(j=0,1,\cdots,m)$的上、下界线性函数。

定理2.1 对于任意的区间向量$X\subseteq X^0\subset R^N$。考虑$X$上的函数

$$\Psi_t(x)=\ln\Big(\sum_{i=1}^{N}\gamma_{ti}x_i+d_t\Big)$$

及其梯度

$$\Psi_t'(X)=\Big(\frac{\partial\Psi_t(x)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\Psi_t(x)}{\partial x_N}\Big)^T,$$

则存在$\underline{z}$, $\bar{z}\in R^N$及线性函数

$$\Psi_t^l(x;X,\sigma):=z_t(\sigma)^T\cdot x+\Psi_t\big(x(\sigma)\big)-z_t(\sigma)^T\cdot x(\sigma), \tag{3}$$

$$\Psi_t^u(x;X,\sigma):=z_t(1-\sigma)^T\cdot x+\Psi_t\big(x(\sigma)\big)-z_t(1-\sigma)^T\cdot x(\sigma), \tag{4}$$

对所有的$x\in X$满足

$$\Psi_t^l(x;X,\sigma)\leqslant\Psi_t(x)\leqslant\Psi_t^u(x;X,\sigma), \tag{5}$$

$$\Psi_t^l\big(x(\sigma);X,\sigma\big)=\Psi_t^u\big(x(\sigma);X,\sigma\big)=\Psi_t^l\big(x(\sigma)\big), \tag{6}$$

其中$x(\sigma)$, $z(\sigma)$分别表示区间向量X和$Z_t:=[\underline{z}_t,\bar{z}_t]$的$2^N$个顶点，$z_t(1-\sigma)$中的向量$1-\sigma=(1-\sigma_1,\cdots,1-\sigma_N)^T$。

证明 对于区间向量X和$\Psi_t'(x)$，存在向量$\underline{z}_t=(\underline{z}_{t1},\cdots,\underline{z}_{tN})^T$和$\bar{z}_t=(\bar{z}_{t1},\cdots,\bar{z}_{tN})^T$满足

$$\underline{z}_t\leqslant\Psi_t'(x)\leqslant\bar{z}_t,\quad\forall\,x\in X, \tag{7}$$

其中

$$\underline{z}_{ti}=\min\left\{\gamma_{ti}\Big(\sum_{n=1}^{N}\min\left(\gamma_{tn}\underline{x}_n,\gamma_{tn}\bar{x}_n\right)+d_t\Big)^{-1},\gamma_{ti}\Big(\sum_{n=1}^{N}\max\left(\gamma_{tn}\underline{x}_n,\gamma_{tn}\bar{x}_n\right)+d_t\Big)^{-1}\right\},$$

$$\bar{z}_{ti}=\max\left\{\gamma_{ti}\Big(\sum_{n=1}^{N}\min\left(\gamma_{tn}\underline{x}_n,\gamma_{tn}\bar{x}_n\right)+d_t\Big)^{-1},\gamma_{ti}\Big(\sum_{n=1}^{N}\max\left(\gamma_{tn}\underline{x}_n,\gamma_{tn}\bar{x}_n\right)+d_t\Big)^{-1}\right\},$$

$i=1,2,\cdots,N$，z_{ti} 表示 z_t 的第 i 个分量。

由微分中值定理，对任意 $x\in X$ 有

$$\Psi_t(x)=\Psi_t\big(x(\sigma)\big)+\Psi_t'(\xi)^{\mathrm{T}}\cdot\big(x-x(\sigma)\big),$$

其中 $\xi=\mu x+(1-\mu)x(\sigma)$，$\mu\in[0,1]$。根据式 (7)，对任意的 $x\in X$，若 $\sigma_i=0$，则有不等式

$$\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\geqslant z_{ti}(\sigma),\quad x_i-x_i(\sigma)\geqslant 0$$

成立；若 $\sigma_i=1$，则有不等式

$$\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\leqslant z_{ti}(\sigma),\quad x_i-x_i(\sigma)\leqslant 0$$

成立，所以不论是 $\sigma_i=0$ 还是 $\sigma_i=1$ 都有

$$\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\big(x_i-x_i(\sigma)\big)\geqslant z_{ti}(\sigma)\big(x_i-x_i(\sigma)\big)$$

成立。因而有

$$\begin{aligned}\Psi_t(x)&=\Psi_t\big(x(\sigma)\big)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\cdot\big(x_i-x_i(\sigma)\big)\\&\geqslant\Psi_t\big(x(\sigma)\big)+\sum_{i=1}^{N}z_{ti}(\sigma)\cdot\big(x_i-x_i(\sigma)\big)\\&=z_t(\sigma)^T\cdot x+\Psi_t\big(x(\sigma)\big)-z_t(\sigma)^T\cdot x(\sigma).\end{aligned}$$

所以对任意的 $x\in X$，有 $\Psi_t^l(x;X,\sigma)\leqslant\Psi_t(x)$ 和 $\Psi_t^l(x(\sigma);X,\sigma)=\Psi_t^l(x(\sigma))$ 成立。

同理，对 $\sigma_i=0$，则有不等式

$$\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\leqslant z_{ti}(1-\sigma),\quad x_i-x_i(\sigma)\geqslant 0,\quad\forall\,x\in X$$

成立，其中 $z_{ti}(1-\sigma)$ 表示 $z_t(1-\sigma)$ 的第 i 个分量。若 $\sigma_i=1$，则有不等式

$$\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\geqslant z_{ti}(1-\sigma),\quad x_i-x_i(\sigma)\leqslant 0,\quad\forall\,x\in X,$$

所以不论是 $\sigma_i=0$ 还是 $\sigma_i=1$ 都有

$$\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\big(x_i-x_i(\sigma)\big)\leqslant z_{ti}(1-\sigma)\big(x_i-x_i(\sigma)\big)$$

成立。所以由中值定理可得

$$\begin{aligned}\Psi_t(x) &= \Psi_t\big(x(\sigma)\big)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\Psi_t(\xi)}{\partial\xi_i}\cdot\big(x_i-x_i(\sigma)\big)\\ &\leqslant \Psi_t\big(x(\sigma)\big)+\sum_{i=1}^{N}z_{ti}(1-\sigma)\cdot\big(x_i-x_i(\sigma)\big)\\ &= z_t(1-\sigma)^T\cdot x+\Psi_t\big(x(\sigma)\big)-z_t(1-\sigma)^T\cdot x(\sigma).\end{aligned}$$

因此，对任意的 $x\in X$，有 $\Psi_t^u(x;X,\sigma)\geqslant\Psi_t(x)$ 和 $\Psi_t^u(x(\sigma);X,\sigma)=\Psi_t^l(x(\sigma))$ 成立。

根据定理2.1，对任意 $X=[\underline{x},\bar{x}]\subseteq X^0\subset R^N$, $j=0,1,\cdots,m$, $t=1,\cdots,T_j$，当选定参数 $\sigma\in\{0,1\}^N$，能按照如下方式构造函数 $\Psi_j:X^0\to R$ 的线性下界函数 $\Psi_j^L(x;X,\sigma)$ 和线性上界函数 $\Psi_j^U(x;X,\sigma)$。对函数

$$\Psi_{jt}(x)=\ln\Big(\sum_{n=1}^{N}\gamma_{jtn}x_n+d_{jt}\Big),\quad j=0,1,\cdots,m,$$

及任一区间向量 X，计算 $Z_{jt}:=[\underline{z}_{jt},\bar{z}_{jt}]$ 使其满足不等式(7)，其中

$$\underline{z}_{jt}=\big(\underline{z}_{jt1},\cdots,\underline{z}_{jtN}\big)^T,\quad \bar{z}_{jt}=\big(\bar{z}_{jt1},\cdots,\bar{z}_{jtN}\big)^T,$$

对 $i=1,2,\cdots,N$, $j=0,1,\cdots,m$, $t=1,\cdots,T_j$，设

$$X_{jt}=\sum_{n=1}^{N}\gamma_{jtn}x_n+d_{jt},$$

并计算

$$X_{jt}^l=\sum_{n=1}^{N}\min(\gamma_{jtn}\underline{x}_n,\gamma_{jtn}\bar{x}_n)+d_{jt},\quad X_{jt}^u=\sum_{n=1}^{N}\max(\gamma_{jtn}\underline{x}_n,\gamma_{jtn}\bar{x}_n)+d_{jt},$$

$$\underline{z}_{jti}=\min\big\{\gamma_{jti}(X_{jt}^l)^{-1},\gamma_{jti}(X_{jt}^u)^{-1}\big\},\quad \bar{z}_{jti}=\max\big\{\gamma_{jti}(X_{jt}^l)^{-1},\gamma_{jti}(X_{jt}^u)^{-1}\big\}.$$

还有

$$x(\sigma)=\underline{x}+\sum_{n=1}^{N}\sigma_n(\bar{x}_n-\underline{x}_n)e_n,\quad z_{jt}(\sigma)=\underline{z}_{jt}+\sum_{n=1}^{N}\sigma_n(\bar{z}_{jtn}-\underline{z}_{jtn})e_n$$

分别表示区间向量 X 和 Z_{jt} 的顶点。再根据定理2.1，函数

$$\Psi_{jt}(x)=\ln\Big(\sum_{n=1}^{N}\gamma_{jtn}x_n+d_{jt}\Big)$$

的线性上、下界函数分别是

$$\Psi_{jt}^U(x;X,\sigma):=z_{jt}(1-\sigma)^T\cdot x+\Psi_{jt}\big(x(\sigma)\big)-z_{jt}(1-\sigma)^T\cdot x(\sigma),$$

$$\Psi_{jt}^L(x;X,\sigma):=z_{jt}(\sigma)^T\cdot x+\Psi_{jt}\big(x(\sigma)\big)-z_{jt}(\sigma)^T\cdot x(\sigma).$$

定义

$$\Psi_j^L(x;X,\sigma)=\sum_{t=1}^{T_j}\Psi_{jt}^L(x;X,\sigma),\quad \Psi_j^U(x;X,\sigma)=\sum_{t=1}^{T_j}\Psi_{jt}^U(x;X,\sigma),$$

显然有

$$\Psi_j^L(x;X,\sigma)\leqslant\Psi_j(x)\leqslant\Psi_j^U(x;X,\sigma). \tag{8}$$

定理 2.2 设 $\Psi_j^L(x;X,\sigma),\Psi_j(x)$ 和 $\Psi_j^U(x;X,\sigma)$ 如上面定义，选定 $\sigma\in\{0,1\}^N$。对任意 $X=[\underline{x},\bar{x}]\subseteq X^0$，$x\in X$ 和 $j=0,1,\cdots,m$，则 $\Delta_j^1=\Psi_j^U(x;X,\sigma)-\Psi_j(x)$ 和 $\Delta_j^2=\Psi_j(x)-\Psi_j^L(x;X,\sigma)$ 满足

$$\lim_{\|\bar{x}-\underline{x}\|\to 0}\max_{x\in X}\Delta_j^1=\lim_{\|\bar{x}-\underline{x}\|\to 0}\max_{x\in X}\Delta_j^2\to 0. \tag{9}$$

证明 对任意 $X\subseteq X^0$ 和 $x\in X$，根据定理 2.1 和式 (1), (3), (4) 与 (8) 有

$$\Psi_j(x)=\sum_{t=1}^{T_j}\ln\Big(\sum_{n=1}^{N}\gamma_{jtn}x_n+d_{jt}\Big)=\sum_{t=1}^{T_j}\Psi_{jt}(x), \tag{10}$$

$$\Psi_j^L(x;X,\sigma)=\sum_{t=1}^{T_j}\Phi_{jt}^L(x;X,\sigma). \tag{11}$$

根据定理 2.1，对任意的 $x\in X$ 有

$$0\leqslant\Psi_{jt}(x)-\Phi_{jt}^L(x;X,\sigma)=\big(\Psi_{jt}'(\xi)-z_{jt}(\sigma)\big)^T\big(x-x(\sigma)\big),\quad\forall\, j,t, \tag{12}$$

其中 $\xi=\mu x+(1-\mu)x(\sigma)$，$\mu\in[0,1]$，$x(\sigma)$，$z(\sigma)$ 分别是 X 和 $Z_{jt}:=[\underline{z}_{jt},\bar{z}_{jt}]$ 的顶点。根据式 (2) 和定理 2.1，对任意固定的 σ，不等式 (12) 满足

$$\begin{aligned}
&\big(\Psi_{jt}'(\xi)-z_{jt}(\sigma)\big)^T\big(x-x(\sigma)\big)\\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N}\Big|\frac{\partial\Psi_{jt}(\xi)}{\partial\xi_n}-z_{jtn}(\sigma)\Big|\cdot\big|x_n-x_n(\sigma)\big|\leqslant\sum_{n=1}^{N}\big|z_{jtn}(0)-z_{jtn}(1)\big|\cdot\big|x_n-x_n(\sigma)\big|\\
=&\sum_{n=1}^{N}\big|\underline{z}_{jtn}-\bar{z}_{jtn}\big|\cdot\big|x_n-x_n(\sigma)\big|=\sum_{n=1}^{N}|\gamma_{jtn}|\cdot\big|(X_{jt}^l)^{-1}-(X_{jt}^u)^{-1}\big|\cdot\big|x_n-x_n(\sigma)\big|\\
\leqslant&\sum_{n=1}^{N}|\gamma_{jtn}|\cdot(\bar{x}_n-\underline{x}_n)\cdot\big|(\eta_{jt})^{-1}\big|\cdot\big|(X_{jt}^l)-(X_{jt}^u)\big|\leqslant\big|(\eta_{jt})^{-1}\big|\Big(\sum_{n=1}^{N}|\gamma_{jtn}|\cdot(\bar{x}_n-\underline{x}_n)\Big)^2,
\end{aligned}$$

其中 $\eta_{jt}=\mu X_{jt}^l+(1-\mu)X_{jt}^u$ 对某些 $\mu\in[0,1]$，第一个不等式、第二个不等式与第一个等式成立是根据式 (2) 和 (7)，第二个等式成立是因为对任意的 $n=1,2,\cdots,N$

$$\begin{aligned}
|\underline{z}_{jtn}-\bar{z}_{jtn}|&=\big|\min\big\{\gamma_{jtn}(X_{jt}^l)^{-1},\gamma_{jtn}(X_{jt}^u)^{-1}\big\}-\max\big\{\gamma_{jtn}(X_{jt}^l)^{-1},\gamma_{jtn}(X_{jt}^u)^{-1}\big\}\big|\\
&=\big|\gamma_{jtn}(X_{jt}^u)^{-1}-\gamma_{jtn}(X_{jt}^l)^{-1}\big|=|\gamma_{jtn}|\big|(X_{jt}^u)^{-1}-(X_{jt}^l)^{-1}\big|,
\end{aligned}$$

第三个不等式是根据式 (2) 以及对函数 x^{-1} 关于区间 $[X_{jt}^l,X_{jt}^u]$ 应用中值定理，第四个不等式是因为

$$|X_{jt}^l-X_{jt}^u|=\sum_{n=1}^{N}\big|\min(\gamma_{jtn}\underline{x}_n,\gamma_{jtn}\bar{x}_n)-\max(\gamma_{jtn}\underline{x}_n,\gamma_{jtn}\bar{x}_n)\big|=\sum_{n=1}^{N}\|\gamma_{jtn}\|\,|\underline{x}_n-\bar{x}_n|.$$

所以有

$$\lim_{\|\overline{x}-\underline{x}\|\to 0}\ \max_{x\in X}\Delta_j^2 \to 0.$$

同理，可以证明

$$\lim_{\|\overline{x}-\underline{x}\|}\ \max_{x\in X}\Delta_j^1 \to 0.$$

根据定理2.2，当 $\|\overline{x}-\underline{x}\|\to 0$ 时，函数 $\Psi_j^L(x;X,\sigma)$ 和 $\Psi_j^U(x;X,\sigma)$ 能充分逼近函数 $\Psi_j(x)$。这样我们可得LMP的线性松驰规划问题(LRP)为

$$\mathrm{LRP}(X)\quad \begin{cases} \min & \Psi_0^L(x;X,\sigma) \\ \text{s.t.} & \Psi_j^L(x;X,\sigma)\leqslant \ln\delta_j, \quad j=1,2,\cdots,m, \\ & x\in X\subseteq X^0. \end{cases} \tag{13}$$

设问题(P)的最优目标值用 $v(P)$ 表示，则根据上面的讨论，对任意的 $X\subseteq X^0$，问题LMP (X) 和LRP (X) 的最优目标值之间有不等式 $v(\mathrm{LRP}(X))\leqslant v(\mathrm{LMP}(X))$ 成立。

3 全局优化算法

下面给出求解LMP的分支定界全局优化算法，算法的核心是分支与定上、下界。

分支定界方法是根据分支规则细分超矩形 X^0 为有限个子超矩形，每个子超矩形对应分支定界树的一个节点及其上的线性松驰子问题。在算法的第 $k\,(k\geqslant 1)$ 次迭代中，设 Q_k 表示由活动节点(即可能存在全局最优解的子超矩形 X)构成的集合。首先利用一个扫描程序将不可能包含全局最优解的子超矩形从 Q_k 中删除，设 Q_{k+1} 是由剩下的子超矩形组成。若 $Q_{k+1}\neq\emptyset$，选取 $X^k\in Q_{k+1}$ 进一步考虑。然后根据分支规则，将 X^k 细分成两个子超矩形 X_1^{k+1}，X_2^{k+1}，完成此细分的分支规则称之为对分法。设 $X^k=[\underline{x},\overline{x}]\subseteq X^0\subset R^N$，对分法的步骤如下：

(i) 设 $\overline{x}_j-\underline{x}_j=\max\limits_{i\in I}\{\overline{x}_i-\underline{x}_i\}$，$I=\{1,2,\cdots,N\}$;

(ii) 设 x_j^* 满足 $\min\{x_j^*-\underline{x}_j,\overline{x}_j-x_j^*\}=\dfrac{1}{2}(\overline{x}_j-\underline{x}_j)$;

(iii) X^k 被细分为两个 N 维子超矩形 X_1^{k+1}，X_2^{k+1},

$$X_1^{k+1}=\big\{x\in\mathrm{R}^N\,|\,\underline{x}_i\leqslant x_i\leqslant\overline{x}_i,\ \underline{x}_j\leqslant x_j\leqslant x_j^*,\ i=1,2,\cdots,N,\ i\neq j\big\},$$

$$X_2^{k+1}=\big\{x\in\mathrm{R}^N\,|\,\underline{x}_i\leqslant x_i\leqslant\overline{x}_i,\ x_j^*\leqslant x_j\leqslant\overline{x}_j,\ i=1,2,\cdots,N,\ i\neq j\big\}.$$

此时，$Q_{k+1}=Q_{k+1}\backslash\{X^k\}\bigcup\{X_1^{k+1},X_2^{k+1}\}$。

算法的第二个基本程序是定下界程序。首先，$k\,(k\geqslant 0)$ 次迭代中，对由分支程序产生的每个子超矩形 $X\subseteq X^0$，通过计算 X 上的线性松驰规划LRP (X) 求得其最优值LB (X)，而LB (X) 即为问题P1 (X) 的最优目标值 $v(X)$ 的一个下界。然后，在第 $k\,(k\geqslant 0)$ 次迭代中，原问题的下界 LB_k 为 $\mathrm{LB}_k=\min\{\mathrm{LB}(X)\,|\,X\in Q_k\}$。

在每次迭代中，问题P1 (X^0) 的上界 UB_k 为 $\mathrm{UB}_k=\Psi_0(\widehat{x}^k)$，其中 $(\widehat{x}^k)$ 表示当前已知的关于问题(P1 (X))的最好可行点。

算法的具体步骤如下：

步骤1 初始化。给定参数 $\varepsilon>0$ 及向量参数 $\sigma=\{0,1\}^N$，令 $k=0$，$Q_0=X^0$ (即问题的初始向量空间)，上界 $\mathrm{UB}=\infty$，可行点集 $F=\emptyset$。求解LRP (X^0) 得最优值 $\beta(X^0)$ 及最优解 $x^0=$

$x(X^0)$，则取下界为 $\beta_0 = \beta(X^0)$。若 x^0 对P1是可行的，则置 $F = \{x^0\}$ 和 $\mathrm{UB} = \Psi_0(x^0)$。若 $\mathrm{UB} \leqslant \beta_0 + \varepsilon$，则算法停止，$x^0$ 是P1的最优解，即 x^0 是问题LMP的最优解，$\Psi_0(x^0)$ 问题LMP的最优值；否则令 $k = 1$，转为执行步骤2；

步骤2　细分。根据对分法将选定的 X^k 平分为两部分 X_1^{k+1}, X_2^{k+1}，设 $\overline{X}^k = \{X_1^{k+1}, X_2^{k+1}\}$；

步骤3　可行性检验。对每个子超矩形 $X \in \overline{X}^k$，计算

$$\Psi_j^L := \min_{x \in X} \Psi_j^L(x; X, \sigma),$$

如果存在 $j \in 0, 1, \cdots, m$ 使得 Ψ_j^L 满足 $\Psi_0^L > \mathrm{UB}$ 或 $\Psi_j^L > \ln \delta_j \, (j \neq 0)$，则从 $\overline{X}^k$ 中删除 X，即 $\overline{X}^k = \overline{X}^k \backslash \{X\}$；

步骤4　定下界。如果 $\overline{X}^k \neq \emptyset$，对任意 $X \in \overline{X}^k$ 计算LRP (X) 得到 $\beta(X)$ 和 $x(X)$。若 $\mathrm{UB} - \beta(X) \leqslant \varepsilon$，则 $\overline{X}^k = \overline{X}^k \backslash \{X\}$。否则，更新

$$\mathrm{UB} := \beta(X), \quad F := F \cup \{x(X)\}, \quad x^{\mathrm{best}} := \arg\min_{x \in F} \Psi_0(x),$$

此时 $Q_k := (Q_k \backslash \{X^k\}) \cup \overline{X}^k$，最新下界为 $\beta_k := \min\limits_{X \in Q_k} \beta(X)$；

步骤5　定上界。选取 X^k 的中点 x^{mid}，若 x^{mid} 对P1是可行的，则 $F := F \cup \{x^{\mathrm{mid}}\}$，令上界 $\mathrm{UB} := \min\{\Psi_0(x) \,|\, x \in F\}$。若 $F \neq \emptyset$，则令 $\widehat{x} = \arg\min\limits_{x \in F} \Psi_0(x)$；

步骤6　收敛检验。设 $Q_{k+1} = Q_k \backslash \{X : \mathrm{UB} - \beta(X) \leqslant \varepsilon,\, X \in Q_k\}$。若 $Q_{k+1} = \emptyset$，则算法停止，UB是问题P1 (X^0) 的最优值和 $\widehat{x}$ 是最优解，从而 $\widehat{x}$ 是问题LMP (X^0) 是最优解。否则，选取一个活动节点 X^{k+1} 满足

$$X^{k+1} = \arg\min_{X \in Q_{k+1}} \beta(X), \quad X^{k+1} := x(X^{k+1}),$$

令 $k := k + 1$ 返回步骤2。

4　算法收敛性及算例

如果算法不在有限步内结束，则很容易证明该算法至少产生了一个无穷嵌套子序列 $\{X^k\}$ (如文献[11])，即对所有的 k 有 $X^{k+1} \subseteq X^k$。因而根据文献[11]可知，存在 $x^* \in R^N$ 使得 $\bigcap\limits_k X^k = x^*$。从而，我们有如下重要的收敛定理。

定理4.1　假定原问题LMP的全局解存在，则算法或者在有限步内求得LMP的全局最优解，或者算法产生的无穷点列 $\{x^k\}$ 的任一聚点 x^* 必为问题LMP的全局最优解。

证明　若算法有限步终止，则结论是显然的。因此假定算法产生了一个无穷迭代序列，不失一般性，不妨设由对分法分割过程产生一个无穷超矩形序列 X^k，对所有的 k 满足 $X^{k+1} \subseteq X^k$。根据算法得

$$\beta_k \leqslant \min_{x \in X^0} \Psi_0(x), \quad X^k \in \arg\min_{X \in Q_k} \beta(X), \quad x^k = x(X^k) \in X^k.$$

因为 $\{x^k\}$ 包含于紧集 X^0，所以存在一个收敛子序列 $\{x^s\} \subseteq \{x^k\}$，设 $\lim\limits_{s \to \infty} x^s = \widehat{x}$。因而根据算法，存在一个下降超矩形序列 $\{X^r\} \subset \{X^s\}$，其中 $X^s \in Q_s$，使得

$$x^r \in X^r, \quad \beta_r = \beta(X^r) = \Psi_0^L(x^r), \quad \lim_{r \to \infty} X^r = \{\widehat{x}\}.$$

由定理2.2，有

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r=\lim_{r\to\infty}\Psi_0^L(x^r)=\lim_{r\to\infty}\Psi_0(x^r)=\Psi_0(\widehat{x}).$$

因而只要证 $\widehat{x}$ 是问题LMP (X^0) 的可行点。

由于 X^0 是闭的，因而 $\widehat{x}\in X^0$。下面利用反证法证明 $\Psi_j(\widehat{x})\leqslant\ln\delta_j$，$j=1,2,\cdots,m$。反设存在 $h\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $\Psi_h(\widehat{x})>\ln\delta_h$。因为 Ψ_h^L 是连续的且根据定理2.2，所以 $\{\Psi_h^L(x^r;X^r,\sigma)\}$ 收敛到 $\Psi_h(\widehat{x})$，必存在 $\bar{r}$，使得所有的 $r>\bar{r}$ 成立

$$\left|\Psi_h^L(x^r;X^r,\sigma)-\Psi_h(\widehat{x})\right|<\Psi_h(\widehat{x})-\ln\delta_h.$$

因此，对所有的 $r>\bar{r}$，有 $\Psi_h^L(x^r;X^r,\sigma)>\ln\delta_h$，这暗示LRP (X^r) 是不可行，这与 $x^r=x(X^r)$ 矛盾。因而 $\widehat{x}$ 是问题LMP (X^0) 的可行点。

为了验证这个全局优化算法，考虑下面两个LMP 问题。

例4.1[8]

$$\begin{aligned}&\min\quad (x_1+x_2)(x_1-x_2+7)\\ &\text{s.t.}\quad FS=\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 14,\ x_1+x_2\leqslant 10,\ -4x_1+x_2\leqslant 0,\\ 2x_1+x_2\geqslant 6,\ x_1-x_2\leqslant 3,\ x_1+2x_2\geqslant 6,\ x_1\leqslant 5.\end{cases}\end{aligned}$$

首先，对 $i=1,2$ 求解如下4个线性规划

$$\begin{aligned}\min/\max\quad & x_i\\ \text{s.t.}\quad & (x_1,x_2)\in FS,\end{aligned}$$

得到初始超矩形 $X^0=\{1\leqslant x_1\leqslant 5,1\leqslant x_2\leqslant 8\}$，然后取 $\sigma=(1,0)^T$，$\varepsilon=10^{-4}$，用本文方法求得最优值为10，最优解为 $x_1=2$，$x_2=8$，迭代次数为3次。

例4.2

$$\begin{aligned}\min\quad & G(x)=(x_1+2x_2-0.5)(2x_1-x_2+3)(3x_1-x_2+4.5)\\ \text{s.t.}\quad & (3x_1-x_2+4)(2x_1-1.5x_2+3)(-x_1+2x_2+2.5)\leqslant 150,\\ & (-x_1+2x_2+2)(2x_1-x_2+2)(1.5x_1+2x_2-2)(-x_1+3x_2+2.5)\leqslant 165,\\ & x_1+x_2\geqslant 3,\\ & x_1\in[1,3],\quad x_2\in[1,3].\end{aligned}$$

取 $\sigma=(0,0)^T$，$\varepsilon=10^{-4}$，用本文方法求得最优值为166.993，最优解为 $x_1=1.7473$，$x_2=1.2527$，迭代次数为20次，计算结果说明该方法是可行和有效的。

参考文献：

[1] Kuno T, Utsunomiya T. A decomposition algorithm for solving certain classes of production-transportation problems with concave production cost[J]. Journal of Global Optimization, 1996, 8: 67-80

[2] Quesada I, Grossmann I E. Alternative bounding approximations for the global optimization of various engineering design problems[C]// I.E. Grossmann, (ed.), Global Optimization in Engineering Design, Vol. 9 Nonconvex Optimization and its Applications, MA: Kluwer Academic Publishers, 1996: 309-331

[3] Dorneich M C, Sahinidis N V. Global optimization algorithms for chip design and compaction[J]. Engineering Optimization, 1995, 25(2): 131-154
[4] Bennett K P, Mangasarian O L. Bilinear separation of two sets in n-space[J]. Computational Optimization and Applications, 1994, 2: 207-227
[5] Benson H P. Global maximization of a generalized concave multiplicative function[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 137: 105-120
[6] Shen P P, Jiao H W. Linearization method for a class of multiplicative programming with exponent[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 183: 328-336
[7] Hong S R, Nikolaos V S. Global optimization of multiplicative programs[J]. Journal of Global Optimization, 2003, 26: 387-418
[8] Zhou X G, Wu K. A method of acceleration for a class of multiplicative programming problems with exponent[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223: 975-982
[9] Hong S R, Nikolaos V S. Global optimization of multiplicative programs[J]. Journal of Global Optimization, 2003, 26: 387-418
[10] Horst R, Tuy H. Global Optimization: Deterministic Approaches[M]. Berlin: Springer, 1993
[11] Tuy H. Convex Analysis and Global Optimization[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1998
[12] 高岳林，邓光智. 凹二次规划问题的一个融合割平面方法的分支定界混合算法[J]. 工程数学学报，2008, 25(4): 589-596
Gao Y L, Deng G Z. A branch and bound method mixed with cutting plane technique for solving concave quadratic programming problems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(4): 589-596
[13] 高岳林，叶留青，张连生. 带有二次约束二次规划问题的分枝定界方法[J]. 工程数学学报，2003, 20(2): 82-86
Gao Y L, Ye L Q, Zhang L S. A branch-and-bound method of the quadratic programming problem with quadratic constraints[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2003, 20(2): 82-86

A Global Optimization Algorithm for Linear Multiplicative Programming

ZHOU Xue-gang[1,2], WU Kun[1], ZENG Hai-qun[1]

(1- School of Mathematical Science and Computing Technology, Center South University, Changsha 410075; 2- Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521)

Abstract: In this paper a global optimization algorithm is proposed for the linear multiplicative programming (LMP). (LMP) has a number of important applications in various areas such as production-transportation, plant layout design, VLSI chip design. Firstly, (LMP) is transformed into an equivalent problem (P1). Second, utilizing the parametric linearization relaxation method, linear underestimates of the objective and constraint functions, linear relaxation programming (LRP) for linear multiplicative programming (LMP) is established over a rectangle, and the proposed deterministic global optimization algorithm is proposed that can converge to the globally optimal solution of (LMP). And finally the numerical experiment is given to illustrate the feasibility and efficiency of the proposed algorithm.
Keywords: LMP; parametric linearization relaxation; global optimization

Received: 18 July 2008. **Accepted:** 25 Nov 2009.